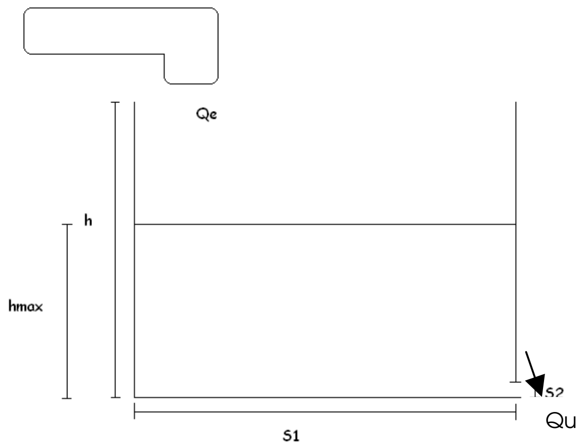
Riempimento di un serbatoio

Un serbatoio cilindrico di base "S1" ed altezza complessiva "h", viene riempito con acqua per mezzo di una condotta avente una portata "Qe". Il serbatoio presenta, in prossimità del fondo, un foro di sezione "S2" , da cui esce una parte del liquido. La sezione del foro è molto più piccola della sezione di base del serbatoio (S2<<S1). Si vuole determinare, istante per istante, il livello dell'acqua tenendo conto di quella uscita dal foro S2.



Nella figura "hmax" identifica l'altezza massima raggiunta dall' acqua e "Qu" la portata di uscita del liquido dal foro S2.

Per prima cosa ricordo il concetto elementare di Portata Q che rappresenta il volume di fluido che, nell'unità di tempo, transita attraverso una arbitraria sezione di condotta. La portata non dipende dalla sezione delle condotta e si può calcolare con la seguenti formule:

Q= Sezione * (Velocità con cui si muove il fluido)

oppure

Q= (Volume riempito) / (tempo di riempimento)

Per risolvere il problema richiesto occorre conoscere la portata di uscita Qu che si ha nel buco S2; essa vale:

Qu = S2 * Vu

avendo indicato con Vu la velocità di uscita del fluido da S2.

Il problema del calcolo di Qu è legato al problema del calcolo di Vu. Sappiamo per esperienza che la velocità di uscita da S2 dipende sicuramente dall'altezza del pelo libero dell'acqua (maggiore è l'altezza e maggiore è la velocità di uscita).

Per trovare una valutazione numerica di Vu ci aiuta Evangelista Torricelli (legge di Torricelli) che ci dice che la velocità con cui l'acqua esce da un un foro praticato su un serbatoio è uguale alla velocità (nel vuoto) che avrebbe un sasso, che fosse fatto cadere da un'altezza pari a quella del pelo libero dell'acqua, sino all'altezza del foro (il tutto è valido solo se "S2" è molto più piccola rispetto "S1", condizione rispettata nel nostro problema).

Sapendo che l'energia potenziale del sasso all'altezza h vale:

$$Ep=m*g*h$$

e che questa energia si trasforma completamente in energia cinetica dopo aver percorso il tratto h (considerato come suolo)

$$Ec=\frac{1}{2}*m*V^2$$

uguagliando Ec con Ep si può ricavare la velocità di tale sasso (che equivale, secondo Torricelli, a Vu); si ha:

$$Vu=\sqrt{\frac{m*g*h}{\frac{1}{2}*m}} \rightarrow Vu=\sqrt{2*g*h}$$

Per valutare l'andamento dell'altezza del liquido nel tempo, occorre calcolare, in un istante generico, di quanto varia l'altezza (Δh) dopo un intervallo di tempo Δt. Tale variazione dipende la liquido entrato dovuto a Qe e da liquido uscito dovuto a Qu.

(volume di liquido entrato) = Qe * Δt
(volume di liquido uscito) = Qu * Δt

quello che a noi interessa è il liquido accumulato nell'intervallo Δt, cioè:

(volume di liquido accumulato) = (volume di liquido entrato) - (volume di liquido uscito)

in formule:

$$Vacc = (Qe - Qu) * \Delta t$$

Ma sapendo che tale volume si distribuisce su una superficie S1:

$$\Delta h = Vacc / S1 = (Qe - Qu) * \Delta t / S1$$

Il serbatoio quindi si riempie aumentando l'altezza di Δh al passare di un intervallo di tempo Δt. Sappiamo per esperienza che ad un certo punto l'altezza si stabilizza: questo avviene ad una altezza "hmax" quando Qe viene bilanciato da Qu (la portata di uscita aumenta continuamente a causa dell'aumento dell'altezza del pelo libero dell'acqua). Potremmo calcolare quale è questa altezza hmax.

All'equilibrio:

Qe=Qu -> $Qe = S2*\sqrt{2*g*h\max}$ -> $h\max = \frac{Qe^2}{2*g*S2^2}$

Resta il problema di trovare un Δt sufficientemente piccolo per fare in modo che la simulazione sia, in prima approssimazione, corretta. Questo lo facciamo trovando un tempo di sistema : il tempo di riferimento. Come tempo di riferimento calcoliamo con una certa approssimazione quanto tempo impiega il serbatoio a raggiungere il valore di hmax. Questo è comunque difficile a causa del buco sul fondo.

Se non ci fosse il foro sul fondo, sarebbe facile calcolare quanto tempo (chiamiamolo Tr= tempo di riferimento) ci vuole, con una portata di ingresso Qe, a fare in modo che il livello del liquido arrivi a hmax; infatti:

(Volume riempito) = Qe * Tr

ma è anche

(Volume riempito) = S1 * hmax

da cui

Qe * Tr = S1 * hmax

quindi

Tr = (S1 * hmax) / Qe

Ora abbiamo anche il tempo di riferimento. Poniamo, al solito, Δt molto minore di Tr:

Δt = Tr / 100

E scegliamo un tempo di simulazione molto più grande di Tr

Ts = Tr * 10

Questo è il tempo durante il quale continueremo a simulare il sistema (ripeteremo i calcoli).

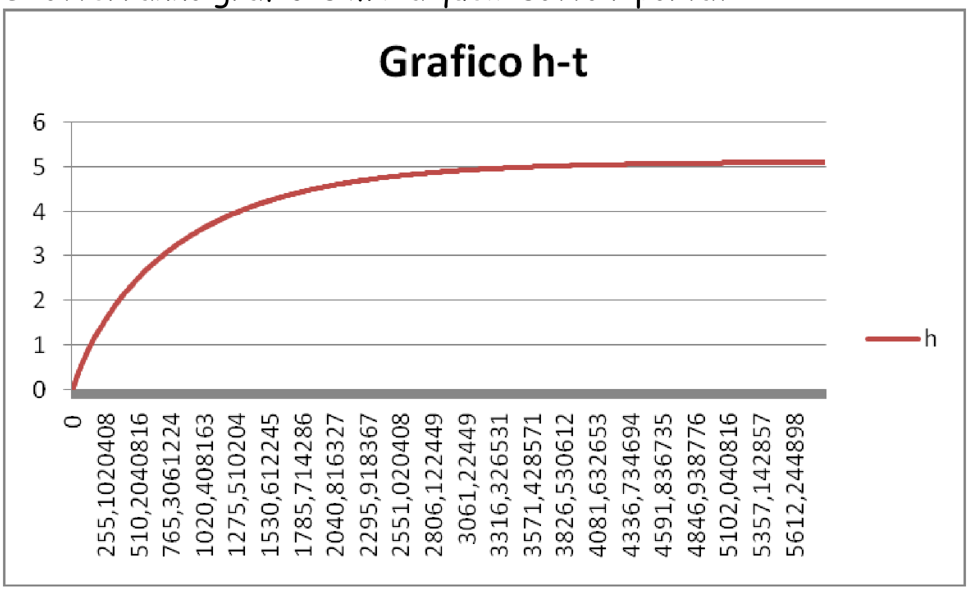
Si può ora impostare la simulazione del sistema utilizzando la seguente tabella con le formule sopra enunciate.

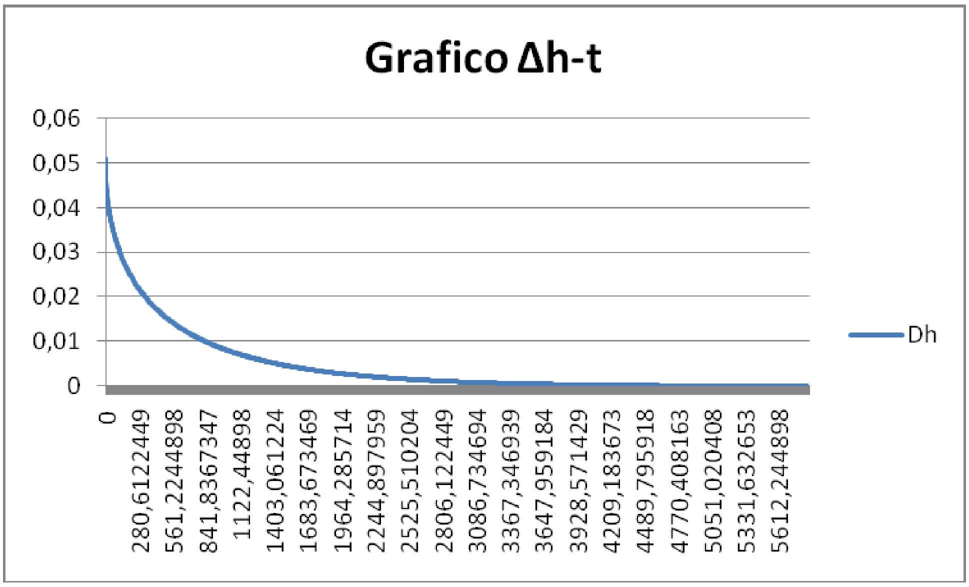
T	h	Vu	Qu	Δh
0	0	$\sqrt{2*g*h}$	V*S2	(Qe-Qu)* Δt /S1
t_{-1} + Δt	$_{h-1}$ + Δh	$\sqrt{2*g*h}$	V*S2	Qe-Qu)* Δt /S1

Si provi ora a simulare inserendo in input i dati di S1, S2 e Qe, quali:

S1= 1 dm^2 S2=S1/1000 dm^2 Qe=1 dm^3/s

Si otterranno grafici simili a quelli sotto riportati





Made by maxrossi91®