

# Goccia d'acqua in regime viscoso

## SISTEMA LINEARE DEL PRIMO ORDINE

### ATTRITO

#### *Attrito di un corpo solido a contatto con altro corpo solido*

Si espone qui l'analisi del moto di un corpo considerando anche gli effetti dovuti all'attrito. Le forze di attrito possono essere di diversi tipi anche in base al mezzo in cui il corpo si muove. L'attrito è la conseguenza della presenza di forze che si oppongono al moto. La situazione può essere ricondotta al caso del moto di un **corpo solido a contatto con un altro corpo solido**. In tal caso abbiamo due tipi di attrito così schematizzabili:

- 1) **Statico** (un corpo fermo in una determinata posizione...se non ci fosse attrito non sarebbe facile rimanere in piedi)
- 2) **dinamico**
  - a. **radente** (caso di un corpo che scivola come ad es. la slitta sulla neve)
  - b. **volvente** (caso della resistenza incontrata da una ruota che rotola x strada)

#### *Attrito di un corpo solido che si muove in un mezzo fluido*

Altro tipo di attrito si verifica quando un **corpo solido si muove in un mezzo fluido**. Il comportamento sia nel mezzo liquido che gassoso è identico per cui in entrambi i casi si parla di **attrito in un mezzo fluido**.

Il problema dello studio del movimento di un corpo in un fluido è riconducibile a quello della determinazione dell'uscita  $v$  (velocità) di un sistema sollecitato da una forza  $F$ .



Esistono comunque due diversi tipi di attrito anche in questo caso: il primo si verifica quando la velocità è bassa e dunque le molecole del fluido scorrono attorno al corpo solido e dunque si incontra solo la resistenza dovuta alla viscosità del mezzo; in tal caso si parla di **moto in regime viscoso**. In tal caso la forza che si oppone al movimento del corpo è proporzionale alla sua velocità di un fattore  $b_1$  secondo tale legge

$$\vec{F}_1 = - b_1 \vec{v}$$

Il **parametro  $b_1$**  dipende dalla viscosità del mezzo e dalla forma del corpo. Il segno meno testimonia l'opposizione della forza al moto.

Il secondo caso si verifica quando la velocità è alta e si generano dietro al corpo delle turbolenze, correnti vorticosi e variabili che hanno maggior forza frenante: in tal caso si parla di **moto in regime turbolento**. In tal caso la forza che si oppone al movimento del corpo è proporzionale al quadrato della sua velocità di un fattore  $b_2$  secondo tale legge

$$\vec{F}_2 = - b_2 v \vec{v}$$

Il **parametro  $b_2$**  dipende dalla forma del corpo e molto dalla sua sezione normale alla direzione del moto, oltre che dalla densità del mezzo

La seconda legge della dinamica (legge di Newton) stabilisce che una forza applicata a un corpo (indeformabile) gli imprime una accelerazione a essa proporzionale, e può essere espressa dalla relazione

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

La costante di proporzionalità è la massa inerziale del corpo.

Pertanto l'equazione che regola il movimento di un corpo in un fluido a bassa velocità è

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

ovvero

$$m \vec{a} = \vec{F} - b_1 \vec{v} - b_2 \vec{v} \vec{v}$$

Consideriamo ora il caso di un moto in regime viscoso e in particolare il moto di una goccia d'acqua che cada soggetta alla forza peso: scelto l'asse y diretto verso il basso il moto si svolge lungo la verticale per cui si abbandona la notazione vettoriale e si ottiene la relazione :

$$m a = F - b_1 v$$

Tale corpo è soggetto alla forza peso esprimibile dalla relazione

$$F = m g$$

La velocità finale si ha quando la forza si annulla e dunque

$$0 = m g - b_1 v_f$$

$$\text{quindi} \quad v_f = m g / b_1$$

**Determiniamo l'unità di misura di  $b_1$  e il suo valore**

$$b_1 = [F / v] = \frac{\text{newton}}{\text{m/s}} = \frac{\text{kg m} / \text{s}^2}{\text{m/s}} = \text{kg} / \text{s}$$

quindi

$$[m / b_1] = [m] / [b_1] = \frac{\text{kg}}{\text{kg} / \text{s}} = \text{s}$$

Se un corpo ha forma sferica il valore di  $b_1$  può essere espresso dalla **legge di Stokes**

$$b_1 = 6 \pi r \eta$$

dove  $r$  è il raggio della sfera e  $\eta$  (eta) è il coefficiente di viscosità del fluido tali valori sono

$$\text{per il mercurio } \eta = 15 * 10^{-3} \text{ g/(cm s)}$$

per l'acqua  $\eta = 10 * 10^{-3} \text{ g/(cm s)}$   
 per l'aria  $\eta = 0,18 * 10^{-3} \text{ g/(cm s)}$

Dagli studi fatti un corpo di forma sferica ha un moto in regime viscoso fintanto che la grandezza dimensionale detta **numero di Reynolds** assume **valori piccoli (<10)**

$$R_y = d v r / \eta$$

Dove d è la densità dell'aria  $1,3 * 10^{-3} \text{ g/cm}^3$   
 e la massa della goccia è espressa come prodotto del volume della sfera per la densità  $\delta$  della goccia (circa  $1 \text{ g/cm}^3$ )

cioè  $m = 4/3 \pi r^3 \delta$

Ponendo come limite 10 al valore del numero di Reynolds si ottiene

$$v_i < 10 * \eta / d r = 1,4 / r$$

Questa relazione mostra come i corpi più grandi siano vincolati a muoversi a velocità più piccole

FORMULE	R=0.1	R=0.01	R=0.001
$b_1 = 6 \pi r \eta$	$3,4 * 10^{-4} \text{ g/s}$	$3,4 * 10^{-5} \text{ g/s}$	$3,4 * 10^{-6} \text{ g/s}$
$m = 4/3 \pi r^3 \delta$	$4,2 * 10^{-3} \text{ g}$	$4,2 * 10^{-6} \text{ g}$	$4,2 * 10^{-9} \text{ g}$
$v_i = 1,4 / r$	14 cm/s	140 cm/s	1400 cm/s
$v_f = mg / b_1$	12100 cm/s	121 cm/s	1,21 cm/s
$R_y = d v r / \eta$ Se è < 10 allora moto viscoso	8700	8,7	0,0087

(p.s. RIEMPIRE LA TABELLA)

Sostituiamo l'accelerazione con  $\Delta V / \Delta T$  e otteniamo una equazione risolvibile numericamente in modo approssimato attraverso il metodo di Eulero

$$m \Delta V / \Delta T = mg - b_1 v$$

$$\Delta V / \Delta T = g - b_1 / m v$$

$$\Delta V / \Delta T = g - 1 / \tau v$$

indicando la costante di tempo  $m/b_1$  con  $\tau$  (tao)

considerando l'intervallo di tempo molto piccolo e sviluppando la formula

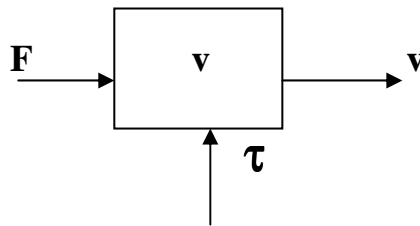
$$\frac{v_{k+1} - v_k}{t_{k+1} - t_k} = g - 1/\tau v$$

$$\text{da cui } v_{k+1} = v_k + (g - 1/\tau v_k) \Delta t$$

### equazione ricorsiva con cui calcolare la velocità della goccia al passare del tempo

Questa relazione esprime il **metodo di soluzione di Eulero**.

Va notato che questo sistema è di quelli **con memoria** e che nella velocità  $v$  si può individuare la variabile di stato. Infatti la storia del sistema è memorizzata in “ $v$ ” pertanto l’uscita del sistema in ogni istante è determinata dal valore di “ $v$ ” nell’istante precedente e dalla sollecitazione  $F$  (che compare attraverso  $g$ ). A questo punto il modello del sistema è rappresentabile nella fig. 2



### PER IL FOGLIO EXCEL:

#### costanti :

acc.gravità  $g = 981 \text{ (cm/sec}^2\text{)}$   
 viscosità aria  $\eta \text{ (eta)} = 0,18 * 10^{-3} \text{ g/(cm s)}$   
 densità acqua  $d = 1 \text{ (gr/cm}^3\text{)}$

#### input

raggio della goccia  $r = 0,01 \text{ cm}$   
 da cui  $b1 = 3,39E-05 \text{ (gr/sec)}$   
 $m = 4,19E-06 \text{ (gr)}$   
 $\tau \text{ (tau)} = 0,123456 \text{ (sec)}$   
 $Vf = 121,111 \text{ (cm/sec)}$

Vel iniziale  $v0 = 0 \text{ (cm/sec)}$

$T_{max} = 1 \text{ sec}$  da cui  $T_{max}/200 = 0,005 \text{ sec}$

#### Nel foglio

t(k)	v(k)	delta v(k)
0	0,0	4,905
0,005	4,905	4,706
0,01	9,611	4,516
0,015	14,127	4,333
0,02	18,46	4,157